УДК 624.04

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ И ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТЫ СЕЧЕНИЯ

К. К. Глушко[1], К. А. Глушко[2]
[1] К. т. н., доцент кафедры архитектуры УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail : const.hlushko@gmail.com
[2] К. т. н, доцент, доцент кафедры природообустройства УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь

Реферат.

При проектировании каркасных зданий часто возникает необходимость оценки устойчивости сжатых стержней, имеющих переменную высоту поперечного сечения, что обусловлено различными значениями внутренних усилий в таких элементах. При проведении реконструкции существующих зданий нередко возникает необходимость оценки запасов несущей способности применённых ранее строительных конструкций, проектирования подобных им новых при необходимости замены. При этом нередко виды конструкций, применявшихся ранее, не имеют современных аналогов, и, как следствие, отсутствуют какие-либо рекомендации к оценке их устойчивости как в современной научной и справочной литературе, так и в современных нормативных документах.

В настоящей статье представлено решение задачи потери устойчивости центрально сжатого стержня с переменной высотой поперечного сечения путём решения дифференциального уравнения продольного изгиба. Решение названной задачи выполнено с использованием метода конечных разностей, в котором используется последовательное уточнение формы изогнутой оси стержня. Применённый метод позволяет отказаться от использования функций Бесселя для задач подобного рода и даёт возможность представить решение дифференциальных уравнений как системы линейных алгебраических уравнений, что приводит к некоторому упрощению процесса поиска коэффициентов расчётных длин. При этом уделено внимание на точность полученного приближённого решения путём экстраполяции производных разных порядков и произведено сравнение погрешности их вычисления с погрешностью округления при расчёте. Полученные результаты представлены в виде графиков зависимости коэффициента расчётной длины от соотношения моментов инерции поперечных сечений на концах стержня.

Ключевые слова: устойчивость, жёсткость, производная, коэффициент расчётной длины, критическая сила.

STABILITY OF CENTRALLY COMPRESSED RODS OF CONSTANT WIDTH AND VARIABLE CROSS-SECTION HEIGHT

Hlushko K.K., Hlushko K.A.

Abstract

When designing frame buildings, it is often necessary to assess the stability of compressed bars with variable cross-sectional heights, which is due to the different values of internal forces in such elements. When renovating existing buildings, it is often necessary to assess the load-bearing capacity of previously used building structures and to design new ones similar to them if replacement is necessary. At the same time, the types of structures used previously often have no modern analogues, and as a result, there are no recommendations for assessing their stability in modern scientific and reference literature or in modern regulatory documents.

This article presents a solution to the problem of stability loss in a centrally compressed rod with a variable cross-sectional height by solving the differential equation of longitudinal bending. The solution to this problem was performed using the finite difference method, which involves sequential refinement of the shape of the curved axis of the rod. The method used makes it possible to dispense with the use of Bessel functions for problems of this kind and allows the solution of differential equations to be represented as a system of linear algebraic equations, which leads to a certain simplification of the process of finding the coefficients of the calculated lengths. At the same time, attention is paid to the accuracy of the approximate solution obtained by extrapolating derivatives of different orders, and a comparison is made of the errors.

Key words: stability, rigidity, derivative, effective length coefficient, critical force.

Введение. Впервые решение задачи устойчивости стержней переменной жёсткости, изменяющейся по степенному закону, было представлено Леонардом Эйлером в 1728 году, развито А. Н. Динником [1], получившим точное решение дифференциального уравнения продольного изгиба с использованием функций Бесселя. При этом были рассмотрены различные способы закрепления концов стержней и различные законы изменения форм поперечных сечений. Методом последовательных приближений задача устойчивости шарнирно опёртого по концам стержня была решена С. П. Тимошенко [2], использовавшим метод последовательных приближений. Впоследствии разработкой методов решения задачи устойчивости стержней переменного сечения, изгибная жёсткость которых изменяется по линейному закону, занимался А. Р. Ржаницын [3]. Следует отметить, что результаты решения рассматриваемой задачи, полученные А. Н. Динником сложно применять на практике, рассмотренные А. Р. Ржаницыным задачи касались устойчивости шарнирно опёртых стержней и стержней, один из концов защемлён, а другой свободен. При рассмотрении более сложных случаев устойчивости стержней переменного сечения описанные подходы имеют ещё большую трудоёмкость решения дифференциального уравнения интерпретации результатов на основе полученного решения. С этим обстоятельством связано развитие решений представленной задачи при помощи численных методов.

Авторами работ [4, 5] при помощи метода конечных разностей были получены величины критических нагрузок на стержни переменного сечения различного типа и способов закрепления концов. Следует отметить, что в упомянутых работах недостаточное внимание уделено обоснованию достаточности дискретизации стержня на отдельные участки для вычисления численных производных, за исключением работы [5], где был использован метод экстраполяции Ричардсона. Для решаемой задачи применение метода конечных элементов в его реализации в программных комплексах для расчёта зданий и сооружений не всегда удобно, поскольку требуется ввод многочисленных начальных данных, многие из которых не используются при расчёте стержней на устойчивость, а также из-за невозможности детального анализа полученных результатов.

Основная часть. В представленной работе решение задачи устойчивости центрально сжатого стержня переменного сечения представлено с использованием метода конечных разностей. Размеры поперечных сечений стержней изменяются по линейному закону от вершины (имеет меньшие размеры поперечного сечения) до основания с большими поперечными размерами. Уравнение продольного изгиба центрально сжатого стержня может быть описано при помощи уравнения второго порядка:

$$EI\left(x\right)\frac{d^2v}{dx^2}+Pv=0\,, \tag{1}$$

разделив которое на *EI(x)* и продифференцировав дважды, можно перейти к его следующему виду:

$$\frac{d^4w}{dx^4}+k_{\min}^2\left(w\frac{J_2\left(\xi\right)}{L^2}+\frac{d^2w}{dx^2}\cdot\frac{1}{J\left(\xi\right)}-\frac{dw}{dx}\frac{J_1\left(\xi\right)}{L}\right)=0\,, \tag{2}$$

$$k^2=\frac{-N}{EI_{\min}}\,; \tag{3}$$

где E – модуль упругости стержня, Па; $N=-P$ – величина продольной силы при сжатии стержня, Н, $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня в точке с координатой x, w – безразмерные поперечные перемещение оси стержня, x – текущая координата в продольном направлении, м, P – усилие сжатия в стержне, Н, численно равное распору на его концах, L – длина стержня, м; $J\left(\xi\right)$ – закон изменения момента инерции поперечного сечения стержня, $\xi=x/L$ – безразмерная ордината, отношение момента инерции произвольного поперечного сечения к минимальному моменту инерции; выражения для определения $J_1\left(\xi\right)$, $J_2\left(\xi\right)$ приведены ниже:

$$J_1(\xi) = \frac{2}{J^2(\xi)} \frac{dJ(\xi)}{d\xi}, \tag{4}$$

$$J_2(\xi) = \frac{2}{J^3(\xi)} \left(\frac{d^2 J(\xi)}{d\xi^2} \right)^2 - \frac{d^2 J(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{J^2(\xi)}, \tag{5}$$

в свою очередь $w=v/v_{max}$ – относительная величина перемещения оси стержня в точке с координатой x, безразмерная величина

Основные допущения, принятые при расчёте:

1) соблюдается упругое деформирование материала стержня;

2) влиянием поворота поперечных сечений стержня на закон распределения продольной силы в нём можно пренебречь;

3) влиянием сдвига при определении поперечных деформаций стержня можно пренебречь.

Применяя метод конечных разностей, можно определить функцию изогнутой оси стержня, предварительно задавшись её приближённой формой.

$$\Delta^4 w = -u^2 \left(Y \frac{J_2(\xi)}{n^4} + \frac{\Delta^2 Y}{n^2} \cdot \frac{1}{J(\xi)} - \Delta Y \frac{J_1(\xi)}{n^3} \right), \tag{6}$$

где

$$u^2 = \frac{-NL^2}{EI_{\min}}. \tag{7}$$

В качестве граничных условий приняты следующие условия закрепления концов:

а) оба конца имеют шарнирные опоры, неподвижные в поперечном направлении к оси стержня;

б) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения закреплён шарнирно, другой защемлён;

в) оба конца стержня защемлены и неподвижны в поперечном направлении;

г) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения свободен, другой защемлён.

Составляя уравнения (6) для средних точек и граничные условия для крайних, можно составить следующее равенство:

$$[A] \cdot [w] = u^2 [Z], \tag{8}$$

где [A]– матрица из коэффициентов при неизвестных значениях безразмерных ординат w_i, которая принимает вид при отсутствии защемления на концах;

[w] – вектор неизвестных безразмерных ординат функции изогнутой оси в каждой точке,

[Z]– вектор значений производных формы $Y_i=Y(x_i)$ изогнутой оси и момента инерции $I(x_i)$ в тех же точках:

$$[Z] = -\left(\frac{1}{n^4} [J_2(\xi_i)] \cdot [Y1] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{J(\xi_i)} \right] \cdot [\Delta^2 Y1] - \frac{1}{n^3} [J_1(\xi_i)] \cdot [\Delta Y1] \right), \tag{9}$$

где, в свою очередь $[J_2(\xi_i)]$ – квадратная диагональная матрица, ненулевые члены которой – аргументы функции (5);

$\left[\frac{1}{J(\xi_i)} \right]$– квадратная диагональная матрица, ненулевые члены которой – обратные значения функции закона изменения момента инерции поперечного сечения стержня;

$[J_1(\xi_i)]$– квадратная диагональная матрица, ненулевые члены которой – аргументы функции (4);

$[Y1]$, $[\Delta Y1]$, $[\Delta^2 Y1]$– векторы значений функции формы изогнутой оси стержня, её первой и второй конечной разности, в которых первые два и последние два элемента являются значениями правой части граничных условий задачи.

Определение вектора значений функции изогнутой оси стержня $[w]$ осуществляется при решении системы линейных уравнений в матричном виде (19):

$$\left[w\right]=u^2\left[A\right]^{-1}\left[Z\right]. \tag{10}$$

При решении этого уравнения удобно принять $u^2=1$ с последующей нормализацией вектора [*w*] для подстановки его значений на место аналогичного вектора [*Y*] – процесс вычисления вектора [*w*] является итерационным, при этом вектор значений [*Y*] задаётся изначально, его значения не должны быть линейно зависимыми. Равенство (6) только в том случае будет справедливым, когда вектор значений формы [*Y*] приблизится к нормализованному вектору значений функции [*w*]. Производя процесс решения уравнения (6) путём последовательных приближений и заменяя вектор [*Y*] на нормализованный вектор [*w*], можно в итоге построить график формы изогнутой оси стержня при продольном изгибе. Величина коэффициента расчётной длины стержня в этом случае может быть определена из следующего выражения:

$$\mu=\pi\sqrt{w_{i,\max}}, \tag{11}$$

где $w_{i,\max}$ – максимальное по величине значение элемента *не нормализованного* вектора безразмерных ординат [*w*], поскольку обратная его величина является коэффициентом пропорциональности между правой и левой частью уравнения (18).

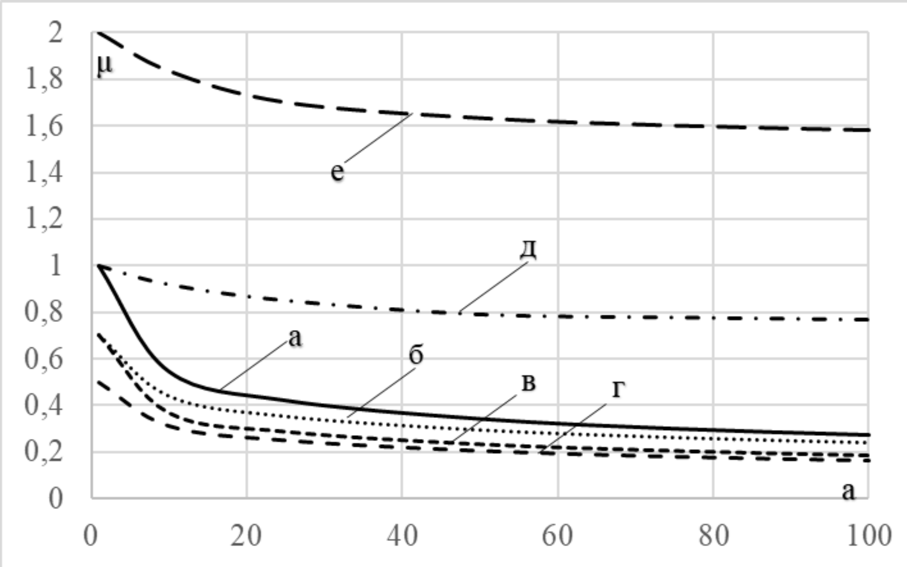
При решении задач подобного рода с применением разностных методов возникает вопрос о точности произведённого решения и достаточности дискретизации стержня по длине. В представленной работе также применён метод экстраполяции Рунге-Ромберга [8] не с целью уточнения величин численных производных, а с целью поиска такой кратности разбиения стержня по длине *n*, при котором величина экстраполированного приращения производной была бы сопоставима с погрешностью округления. Расчёт стержней на устойчивость производился с числом участков разбиения стержня по длине *n*=6, 12, 25, 50. При этом погрешность вычисления производных второго порядка точности уменьшалась в 4, 17 и 70 раз. Следует отметить, что для различных способов закрепления концов стержня применялась различная кратность разбиения стержня по длине.

Представленный подход был реализован для решения задач устойчивости стержней прямоугольного поперечного сечения. В таблице 1 приведены формулы законов изменения величин моментов инерции поперечных сечений по длине стержня, приняв за *f* отношение максимального и минимального размеров поперечных сечений.

Таблица 1. – Формулы законов изменения величин моментов инерции поперечных сечений и их производных

Определяемый параметр	**Прямоугольное поперечное сечение**
$J(\xi)$	$\left(1+\xi(f-1)\right)^3$
$J_1(\xi)$	$\dfrac{6(f-1)}{\left(1+\xi(f-1)\right)^4}$
$J_2(\xi)$	$\dfrac{12(f-1)^2}{\left(1+\xi(f-1)\right)^5}$

На рисунке 1 представлены графики изменения коэффициентов расчётных длин стержней для рассмотренных выше способов закрепления концов.



а – оба конца имеют шарнирные опоры, б – конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения закреплён шарнирно, другой защемлён, в – конец стержня с большими размерами поперечного сечения закреплён шарнирно, другой защемлён, г – оба конца стержня защемлены и неподвижны в поперечном направлении, д – скользящая заделка на конце стержня с меньшими размерами поперечного сечения е – конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения свободен, другой защемлён

Рисунок 1. – Коэффициенты расчётных длин стержней переменного поперечного сечения при продольном изгибе

Используя графики изменения расчётных длин, проверку устойчивости центрально сжатых стержней переменного поперечного сечения с линейным изменением его размеров по длине можно производить при помощи формулы Эйлера.

Выводы. Разработана метод расчёта устойчивости центрально сжатых стержней поперечного сечения с линейным и непрерывным изменением их высоты по длине. При решении этой задачи обоснована необходимая степень дискретизации стержня при помощи экстраполяции производных.

Полученные результаты в виде графиков изменения коэффициентов расчётных длин центрально сжатых стержней переменного поперечного сечения рекомендуется применять при расчёте их на устойчивость в составе остова проектируемых и эксплуатируемых зданий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динник, А.Н. Продольный изгиб. Кручение / А.Н. Динник. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 392 с.

2. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко; под ред. В.З. Власова. – М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. – 532 с.

3. Ржаницын, А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем / А.Р. Ржаницын. – М.: Гостехиздат, 1955. – 475 с.

4. Newmark, N.M. Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads / N.M. Newmark // ASCE Transactions. – 1943. – Paper No. 2202. – Vol. 108. – P. 1161-1234.

5. Salvadori, M.G. Numerical computation of buckling loads by finite differences / M.G. Salvadori // ASCE Transactions. – 1951. – Vol. 116. – P. 590-624.

6. Гончаров, В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции / В. Л. Гончаров. – Успехи математических наук. – 1937. – № 3. – С. 113–143.

7. Лазаров, Р. Д. О построении и исследовании однородных разностных схем // Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, А. А. Самарский. – Математический сборник. – 1982. – Т. 117(159), № 4. – С. 469–480.

8. Н.Н. Калиткин. Об экстраполяции на сгущающихся сетках // Математическое моделирование, 1994, т.6, №1, с.86-98